

ПРИМЕНЕ ЛИНЕАРНЕ АЛГЕБРЕ

APPLICATIONS OF LINEAR ALGEBRA

Аутор:

МИЛИЦА ГАГИЋ

IV разред, Гимназија „Урош Предић“, Панчево, Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“, Панчево

Ментори:

НАДА РАНКОВИЋ

професор математике, Гимназија „Урош Предић“, Панчево, Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“, Панчево

МИЛУТИН КОЈИЋ

професор математике, Гимназија „Урош Предић“, Панчево, Регионални центар за таленте „Михајло Пупин“, Панчево

РЕЗИМЕ

Линеарна алгебра је грана математике која проучава векторе, векторске просторе, линеарне трансформације и матрице. Представља ослонац за бројне научне дисциплине и практичне примене, а њена присутност се манифестује у широкој примени у интердисциплинарним доменима. Овај рад је базиран на препознавању фундаменталне улоге линеарне алгебре у разноврсним аспектима савремене науке и технологије. Циљ рада је да се истакну предности које доноси примена линеарне алгебре током решавања сложених проблема. Примена ове теме демонстрирана је кроз области као што су: математика, програмирање, економија, географија...

Кључне речи: линеарна алгебра, примене, вектори, матрице

ABSTRACT

Linear algebra is the branch of mathematics that studies vectors, vector spaces, linear transformations and matrices. It represents a support for numerous scientific disciplines and practical applications, and its presence is manifested in a wide application in interdisciplinary domains. This work is based on the recognition of the fundamental role of linear algebra in various aspects of modern science and technology. The aim of the paper is to highlight the advantages of applying linear algebra when solving complex problems. The application of the topic was demonstrated through areas such as: mathematics, programming, economics, geography...

Keywords: linear algebra, applications, vectors, matrices

УВОД

У домену фундаменталних области математике, линеарна алгебра произилази као есенцијална грана која се бави проучавањем линеарних трансформација, матрица, система линеарних једначина и векторских простора. Њена изузетна универзалност и применљивост чине је незаобилазним алатом у широком спектру дисциплина, од теоријске физике и инжењерства до економије и информационих технологија.

Централна парадигма линеарног алгебарског приступа лежи у апстрактној анализи матрица, вектора и линеарних трансформација, омогућавајући разумевање комплексних феномена кроз формализовану структуру и оперативне алгебарске технике.

У овом раду, истражује се широк спектар примена линеарне алгебре, фокусирајући се на њен значај у контексту конкретних проблема геометријских трансформација и теорије игара. Кроз рад се истражује начин на који линеарна алгебра постаје основна компонента савремених научних истраживања, не само као теоријски оквир већ и као практичан алат за решавање сложених проблема у различитим доменима. Векторски простори имају важну улогу у модерној математици па због тога линеарна алгебра налази мноштво примена у другим математичким дисциплинама. Осим у математици, неретко се примењује у доменима и друштвених и природних наука. Садржаји који одређују ову дисциплину јављају се кроз покушаје решавања бројних практичних проблема, што је од изузетне важности за сваког.

Ова математичка дисциплина не само да обликује темеље модерних технологија, већ дубоко утиче на разне аспекте људског живота. Кроз различите примере се може уочити како се линеарна алгебра интегрира у разне домene, придоносећи ефикасности, оптимизацији и разумевању сложених појава.

Линеарна алгебра се користи у различитим дисциплинама за решавање великог броја проблема. Своју примену нашла је у многим областима, као што су: математика, физика, инжењеринг, економија, биологија, географија, медицина, криптографија, пољопривреда, роботика...

Линеарна алгебра је развијањем различитих метода, алгоритама и математичког језика мењала облике и начине представљања, али су основни концепти сачувани, а веза коју успоставља са другим областима показује сврху и значај њеног постојања.

Циљ рада је да представи важност ове теме и широку применљивост у великом броју подручја. Представљени су основни појмови линеарне алгебре, најпознатије теореме и методе које се користе, као и многобројне примене које су од изузетног значаја, а важно је напоменути да рад приказује само један део ове обимне и комплексне грађе.

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Предмет овог истраживања је линеарна алгебра и њене основне особине, методе и алгоритми на којима се заснива, као и презентација ове обимне теме у другим пољима науке и свакодневног живота. Проучавање ове теме отвара изванредне могућности, како у проучавању бесконачног броја примена, тако и у пољу чисте математике. Ма колико деловала на први поглед бескорисно и непримењиво, линеарна алгебра је у последње време у великој мери унапредила и олакшала рад многима који се служе њеним алатима.

Чини се да је корен сваког истраживања у математици управо проблем из реалног света – његово моделовање и решавање. Универзалној алгебри се често приписује атрибут непримењивости и бесмислености, али је управо она изродила методе које гарантују исправност многих метода за решавање проблема.

Истраживање је усмерено на: избор истраживачког проблема (истраживање и критичка евалуација литературе у циљу потврде и дефинисања контекста у коме се примењује линеарна алгебра), формулацију прецизних циљева истраживања, прикупљање података из доступних извора, експлорацију података, анализу истих, избор референтне литературе, примера, задатака, доказа и илустрације ове теме, као и на интерпретацију и презентовање закључака истраживања. Резултати овог истраживања показују да линеарна алгебра има широк спектар примена којих многи нису ни свесни.

Матрице

Дефиниција 1: Нека је $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ поље, а $n, m \geq 1$ природни бројеви. Пресликавање $A : \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\} \rightarrow \mathbb{F}$ представља матрицу типа (n, m) , а вредност $A(i, j) \in \mathbb{F}$, где $i \in [1, n]$ и $j \in [1, m]$, назива се елемент матрице.

Елемент матрице се може означавати и са a_{ij} или $[A]_{ij}$.

Скуп свих вредности пресликавања A зове се матрица и означава се на следећи начин:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Елементи матрице A распоређени су у n врста и m колона. Уређена m -торка $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im})$ се назива i -та врста матрице A , а уређена n -торка $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ j -та колона матрице A . Елементи матрице A индексирани су на начин који одмах указује на њихов положај у матрици. Елемент a_{ij} се налази на пресеку i -те врсте и j -те колоне.

Дефиниција 2: Матрице $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ су једнаке ако су једнаке као пресликавања, то јест ако су истог типа што значи да су им елементи на одговарајућим позицијама једнаки.

Дефиниција 3: Збир матрица $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ типа (n, m) је матрица $C = [c_{ij}]$ типа (n, m) за чије елементе важи $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, где $i \in [1, n]$ и $j \in [1, m]$.

Дефиниција 4: Умножак матрице $A = [a_{ij}]$ типа (n, m) скаларом $\lambda \in \mathbb{F}$ је матрица $B = [b_{ij}]$ типа (n, m) за чије елементе важи $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где $i \in [1, n]$ и $j \in [1, m]$.

Дефиниција 5: Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица типа (n, m) , $B = [b_{ij}]$ матрица типа (m, p) , а $C = [c_{ij}]$ типа (n, p) резултат множења матрица A и B . Елементи матрице C су дати следећом формулом: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$, где $i \in [1, n]$ и $j \in [1, p]$. Множење матрица се може представити и на следећи начин: $M_{nm}(\mathbb{F}) \times M_{mp}(\mathbb{F}) \rightarrow M_{np}(\mathbb{F})$.

Вектори

Дефиниција 6: Вектор је усмерена дуж код које је тачно одређена почетна и крајња тачка. Одликују га правац, смер и интензитет. Вектор код којег је тачка A почетна, а B крајња тачка записује се као $\overrightarrow{AB}$.

Дефиниција 7: Интензитет вектора представља његову дужину и обележава се са $|\overrightarrow{AB}|$. Интензитет вектора се рачуна по следећој формули: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$, где су x_a и y_a координате тачке A , а x_b и y_b координате тачке B .

Дефиниција 8: Нека је V непразан скуп и нека је дефинисано пресликавање $+: V \times V \rightarrow V$ (сабирање вектора) као и пресликавање $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (множење вектора скаларом) тако да важи:

1. За све $u, v \in V$ је $u + v \in V$,
2. За све $u, v, w \in V$ је $(v + u) + w = v + (u + w)$,
3. Постоји $e \in V$ тако да за свако $v \in V$ важи $v + e = e + v = v$,
4. За свако $v \in V$ постоји $-v \in V$ тако да $v + (-v) = (-v) + v = e$,
5. За све $u, v \in V$ је $u + v = v + u$,
6. За све $\lambda \in \mathbb{R}$ и све $u, v \in V$ је $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,
7. За све $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и све $v \in V$ је $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
8. За све $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и све $v \in V$ је $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$,
9. За све $v \in V$ је $1 \cdot v = v$.

Елементи скупа V се називају вектори, а елементи скупа $\mathbb{R}$ скалари. На овај начин дефинисан скуп V и операције сабирања и множења представљају векторски простор.

Линеарне трансформације

Дефиниција 9: Нека су $V_1 = (V_1, +, \cdot, \mathbb{F})$ и $V_2 = (V_2, +, \cdot, \mathbb{F})$ векторски простори над истим пољем $\mathbb{F} = (\mathbb{F}, +, \cdot)$. Тада се функција $f: V_1 \rightarrow V_2$ назива линеарна трансформација векторског простора V_1 у векторски простор V_2 ако за свако $x, y \in V_1$ и $\alpha \in \mathbb{F}$ важи: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ и $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Најважније линеарне трансформације су геометријске трансформације које могу променити положај, величину, оријентацију и облик предмета – 2D и 3D трансформације (транслација, ротација, скалирање...).

Овај рад ће првенствено бити базиран на 3D ротацијама и њиховим применама.

Ротација у 3D систему представља процес промене оријентације објекта за одређени угао у односу на неку тачку или вектор. Матрице ротације око све три осе за угао θ су дате на следећи начин:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ако се почетни објекат означити са $A(x, y, z)$, за њега важи следеће: $A' = A \cdot R(\theta)$, где A' представља матрицу положаја објекта који се добија ротацијом објекта A .

У случају комбинованих трансформација у 3D простору, некада је потребно користити ротацију око више оса, при чему у општем случају оне нису комутативне. Потребно је одредити концепт по ком се може директно задати ротација у 3D систему. Свака ротација се може представити као композиција три ротације око три различите осе: око x -осе у Oyz равни за угао α , око y -осе у Oxz равни за угао β и око z -осе у Oxy равни за угао γ . Ови углови се називају Ојлерови¹ углови.

Композиција ротације око x , y и z -осе дата је матрицом на следећи начин:

$$R = R_x R_y R_z = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix},$$

Из матрице се могу извести вредности Ојлерових углова:

$\alpha = -\arctg \frac{R_{23}}{R_{33}}, \beta = \arcsin R_{13}, \gamma = -\arctg \frac{R_{12}}{R_{11}}$, где R_{ij} представља вредност која се у матрици R налази у пресеку i -те врсте и j -те колоне.

С обзиром на то да композиција матрица ротација није комутативна, облик матрице R зависи од редоследа матрица у композицији.

Претходно наведене формуле важе за ротације искључиво око координатних оса. У 3D простору, могуће су ротације и око произвољног вектора који се не поклапа са једном од оса. Ово се може решити тако што се дата ротација сведе на једноставнији проблем, тако што се вектор око кога треба ротирати објекат поклопи са једном од оса. Са друге стране,

¹ Леонард Ојлер (1707-1783) – швајцарски математичар

постоји Родригезова² формула која приказује ротацију око произвољног вектора $a = [x \ y \ z]$ за угао θ у 3D простору. Ова формула се матрицом представља на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + x^2(1 - \cos \theta) & xy(1 - \cos \theta) - z \sin \theta & xz(1 - \cos \theta) + y \sin \theta \\ xy(1 - \cos \theta) + z \sin \theta & \cos \theta + y^2(1 - \cos \theta) & yz(1 - \cos \theta) - x \sin \theta \\ xz(1 - \cos \theta) - y \sin \theta & yz(1 - \cos \theta) + x \sin \theta & \cos \theta + z^2(1 - \cos \theta) \end{bmatrix}$$

Пример 1: Ротација једног града у други. У овом примеру ће као модели бити коришћени Панчево и Токио. Дакле, потребно је одредити углове ротације око сваке осе тако да се Панчево ротира у Токио. Нека су то углови: α – угао ротације око x -осе, β – око y -осе и γ – око z -осе.

Координате Панчева: $44^\circ 52' 15''$ северне географске ширине и $20^\circ 38' 51''$ источне географске дужине.

Координате Токија: $35^\circ 42' 02''$ северне географске ширине и $139^\circ 42' 54''$ источне географске дужине.

Ради лакшег рачуна биће коришћене следеће величине: 45° СГШ и 20° ИГД за Панчево, а 35° СГШ и 140° ИГД за Токио. Одступања од тачних резултата готово да нема.

Нека је планета постављена у тродимензиони координатни систем тако да је координатни почетак центар Земље и тако да је у простору ограниченом са позитивним деловима оса смештена осмина лопте која је ограничена Екватором, Гриничом и меридијаном који се налази 90° источно од Екватора. Одавде следи да је раздаљина координатног почетка и било ког места на планети у ствари полупречник Земље (6371 km), то јест интензитет вектора чија је почетна тачка координатни почетак, а крајња било који град је: $|R| = 6371$. Такође, може се закључити да се географска дужина представља x координатом, а географска ширина у координатом. Самим тим за полупречник важи: $|R| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Нека су x , y и z координате Панчева, а x' , y' и z' координате Токија, при чему се оне могу добити једноставним пропорцијама. Све три координате Панчева су позитивне, а с обзиром на то да је географска дужина Токија 140° , по границама које су претходно постављене, она прелази у следећи квадрант, па су x' и y' позитивне, а z' негативна координата.

$$\frac{R}{90^\circ} = \frac{x}{20^\circ} \Rightarrow x = R \frac{20^\circ}{90^\circ} = \frac{2}{9}R, \quad \frac{R}{90^\circ} = \frac{y}{45^\circ} \Rightarrow y = R \frac{45^\circ}{90^\circ} = \frac{1}{2}R,$$

$$\frac{R}{90^\circ} = \frac{x'}{50^\circ} \Rightarrow x' = R \frac{50^\circ}{90^\circ} = \frac{5}{9}R, \quad \frac{R}{90^\circ} = \frac{y'}{35^\circ} \Rightarrow y' = R \frac{35^\circ}{90^\circ} = \frac{7}{18}R$$

$$|R| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{\sqrt{227}}{18}R$$

² Бењамин Олинде Родригез (1795-1851) – француски математичар

$$|R| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \Rightarrow z' = -\sqrt{R^2 - x'^2 - y'^2} = -\frac{\sqrt{175}}{18}R$$

Одавде се лако закључује следеће:

$$A = [x \ y \ z] = \left[\frac{2}{9}R \ \frac{1}{2}R \ \frac{\sqrt{227}}{18}R \right], \quad A' = [x' \ y' \ z'] = \left[\frac{5}{9}R \ \frac{7}{18}R \ -\frac{\sqrt{175}}{18}R \right]$$

Како се ротацијом око једне координатне осе мењају вредности друге две координате, потребно је првом ротацијом око произвољне осе добити поклапање једне координате, а затим се оса чија је координата добијена фиксира и око ње се врши ротација. Неопходно је да се том ротацијом поклопе преостале две координате.

Нека се прва ротација врши око x -осе: $A \cdot R_x = A_1$, где A_1 представља матрицу која одређује положај тачке која се добија датом ротацијом.

$$\left[\frac{2}{9}R \ \frac{1}{2}R \ \frac{\sqrt{227}}{18}R \right] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \left[\frac{2}{9}R \ \frac{1}{2}R \cos \alpha + \frac{\sqrt{227}}{18}R \sin \alpha \quad -\frac{1}{2}R \sin \alpha + \frac{\sqrt{227}}{18}R \cos \alpha \right]$$

Могућа поклапања су:

$$\frac{1}{2}R \cos \alpha + \frac{\sqrt{227}}{18}R \sin \alpha = \frac{7}{18}R \quad \vee \quad -\frac{1}{2}R \sin \alpha + \frac{\sqrt{227}}{18}R \cos \alpha = -\frac{\sqrt{175}}{18}R$$

Прво ће бити размотрен случај поклапања у координате:

$$\frac{1}{2}R \cos \alpha + \frac{\sqrt{227}}{18}R \sin \alpha = \frac{7}{18}R \Rightarrow \alpha = 2.19285rad \vee \alpha = -0.128194rad$$

Нека је $\alpha = 2.19285rad$. Тада се матрица A_1 трансформише на следећи начин:

$A_1 = \left[\frac{2}{9}R \ \frac{7}{18}R \ -0.894083R \right]$. С обзиром на то да се у координата поклопила са координатом y' , следећи корак је ротација око y -осе: $A_1 \cdot R_y = A_2$, где је A_2 матрица која одређује положај тачке која се добија датом ротацијом.

$$\left[\frac{2}{9}R \ \frac{7}{18}R \ -0.894083R \right] \cdot \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} = \left[\frac{2}{9}R \cos \beta + 0.894083R \sin \beta \quad \frac{7}{18}R \quad \frac{2}{9}R \sin \beta - 0.894083R \cos \beta \right]$$

Уколико би се сада поклопила само једна координата, следећом ротацијом би једна од координата које су на добром месту променила положај и поново би дошло до претходно наведене ситуације. Одавде следи да се датом ротацијом морају поклопити преостале две координате:

$$\frac{2}{9}R \cos \beta + 0.894083R \sin \beta = \frac{5}{9}R \Rightarrow \beta = 2.2507rad \vee \beta = 0.40367rad$$

$$\frac{2}{9}R \sin \beta - 0.894083R \cos \beta = -\frac{\sqrt{175}}{18}R \Rightarrow \beta = 0.40367rad \vee \beta = -0.890897rad$$

Пошто је у обе једначине једно решење $\beta = 0.40367rad$, применом ове ротације за дати угао биће поклопљене и преостале две координате, па је самим тим задатак решен јер су све три координате првог града премештене на позиције координата другог града.

С обзиром на то да су после друге ротације све координате на месту, ротацију око z -осе није потребно вршити, па је $\gamma = 0$.

Дакле, како би била извршена ротација Панчева у Токио, потребно је извршити ротацију око x -осе за $2.19285rad$ (125.64°) и око y -осе за $0.40367rad$ (23.13°), а око z -осе не треба вршити ротацију.

Важно је напоменути да ово није једини начин да се изврши поменута ротација. Током решавања овог задатка су се отворили различити начини за дато ротирање с обзиром на то да пре сваке ротације или рачунања углова постоји више могућности, па самим тим и више комбинација за решавање задатка.

Матричне игре

Матрична игра представља математички концепт у теорији игара у којем играчи бирају одређене стратегије у циљу постизања оптималних резултата. Сваки играч има свој скуп стратегија, а исходи игре се представљају матрицом добитка. У матричној игри сваки играч тежи максимизацији свог добитка или минимизацији губитка, узимајући у обзир потезе противника. Ова анализа омогућава дубље разумевање динамике међусобног утицаја и стратегијског размишљања у ситуацијама где су интереси две стране конфликтни. Кроз анализу матричне игре, истражује се приступ сваког играча с циљем постизања најпожељнијег исхода. Главни концепт матричних игара је концепт стратегије. Стратегија неког играча представља унапред дефинисан скуп потеза које играч има на располагању за време игре. Осим стратегије, јако је важан и концепт корисности који представља добитак тог играча у односу на комбинацију стратегија свих играча у тој игри.

Дефиниција 10: Нека је $N = \{1, \dots, n\}$ коначан скуп играча. Стратешка игра са n играча је уређени пар $G = (A, u)$ који се састоји од:

- ✓ Скупа стратешких профила: За сваки $i \in N$, нека је $A_i \neq \emptyset$ скуп стратегија играча i . Скуп $A = A_1 \times \dots \times A_n$ се назива скупом стратешких профила.
- ✓ Функције корисности: За сваки $i \in N$, нека је $u_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ функција корисности играча i . Функција $u = (u_1, \dots, u_n) : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ се назива функција корисности.

Правила игре се могу објаснити кроз следећи пример: игру играју два играча, A и B . Играч A има на располагању n стратегија, а играч B их има m . Ако играч A одабере i -ту стратегију, а B j -ту, игра се завршава тако што играч A добије или губи вредност a_{ij} из своје матрице добити. Матрични приказ вредности које играч A може добити се може приказати на следећи начин:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]$$

где $a_{ij} = V_A(a_i, b_j)$ представља вредност коју играч A добија или губи ако искористи стратегију i , а играч B стратегију j . Циљ првог играча је максимизација функције $V_A(a_i, b_j)$, а другог играча минимизација исте.

Дефиниција 11: Матричне игре са нултим збиром су оне код којих важи: $V_A(a_i, b_j) + V_B(a_i, b_j) = 0$.

Сваки играч бира своју стратегију тако да исход игре буде што повољнији за њега. Играч A настоји да што више добије, а играч B да што мање изгуби у игри. Посматра се најпре играч A и његово резонување о могућности повећања добитка. Из претходно поменуте матрице вредности играча A се види да он има n стратегија на располагању. Ако одабере стратегију a_i , онда он добија један од следећих износа: $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$ у зависности од тога коју стратегију изабере играч B . У најнеповољнијем случају за њега ће добити $\underline{\Delta}(a_i) = \min_j a_{ij}$.

Међутим, бирајући стратегију a_i , играч A мора да рачуна да ће у том случају његов противник одабрати оптималну стратегију b_j тако да играч A добије минималну вредност. То значи да је за играча A најповољнија она стратегија којој одговара највећа вредност из претходне релације, а она износи: $\max_i \underline{\Delta}(a_i) = \max_i \min_j a_{ij} = a_i'$. Ако играч A своју стратегију одреди на овај начин, онда a_i' представља његов минимални добитак, то јест, он се може повећати у случају одабира погрешне стратегије од стране играча B , па се вредност a_i' назива доња вредност матричне игре. Стратегија која играчу A обезбеђује добитак a_i' се назива максиминимална стратегија и она је оптимална за играча A .

На сличан начин се анализира настојање играча B да што више смањи свој губитак. Уколико он изабере стратегију b_j , за њега је најбоља она стратегија према којој ће имати најмању вредност губитка и она износи: $\min_j \bar{\Delta}(b_j) = \min_j \max_i a_{ij} = b_j'$. Ако играч B своју стратегију одреди на овај начин, онда b_j' представља његов максимални губитак, то јест, он може бити мањи ако играч A не одабере оптималну стратегију за себе, па се b_j' назива горња вредност матричне игре.

Уколико се вредност матричне игре обележи са v и ако оба играча играју своје оптималне стратегије, може се приметити да се вредност v налази између доње и горње вредности матричне игре, то јест важи: $a_i' \leq v \leq b_j'$.

У играма у којима неједначине претходних релација постају једначине, то јест важи: $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{i'j'} = v$, лако се одређује оптимална стратегија играча и вредност матричне игре. Елемент матрице вредности $a_{i'j'}$ се назива седлом матрице.

Дефиниција 12: Седло матрице вредности представља елемент који је најмањи у врсти, а у исто време и највећи у својој колони. Ова вредност одређује оптималне стратегије оба играча. Врста матрице са индексом i' представља оптималну стратегију играча A , а колона

матрице са индексом j' одређује оптималну стратегију играча B . Вредност елемента који представља седло је истовремено вредност матричне игре.

Дефиниција 13: Игре са чистом стратегијом или просте матричне игре су оне у којима оба играча играју увек исту стратегију.

Пример 2: У игри учествују два играча, A и B . Оба играча имају на располагању по три стратегије (стратегије играча A дате су по врстама, а играча B по колонама). Нека је игра дата матрицом добитка играча A на следећи начин:

$$\begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Потребно је одредити оптималне стратегије играча, као и вредност игре.

$$\max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-4, 2, -2) = \max_i (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}) = a_{23} = a_2' = 2$$

$$\min_j \max_i a_{ij} = \min_j (8, 4, 2) = \min_j (a_{31}, a_{21}, a_{23}) = a_{23} = b_3' = 2$$

Како је $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{23} = 2$, матрица добитка има седло, које се налази у пресеку друге стратегије играча A и треће стратегије играча B – то значи да игра има чисту стратегију. Седло представља вредност игре, па је у овом случају $v = a_{23} = 2$.

Када матрица добитка нема седло, не постоји чиста стратегија неког играча која би му обезбедила минимални загарантовани добитак, то јест максимални губитак. У том случају, уводе се елементи случајности код избора појединих стратегија и не бира се само једна стратегија већ више њих – свака стратегија се појављује са одређеном вероватноћом.

Играч A на располагању има n стратегија и сваку од њих бира са одређеном вероватноћом. Нека су $p_1, p_2, \dots, p_n$ вероватноће избора појединачних стратегија. За њих важи: $p_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Вектор $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ представља мешовиту стратегију играча A .

На исти начин се посматра играч B . Он на располагању има m стратегија и за сваку се одлучује са одређеном вероватноћом. Нека су вероватноће за избор његових стратегија означене са $q_1, q_2, \dots, q_m$ и за њих важе релације исте као и у случају играча A . Вектор $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ представља мешовиту стратегију играча B .

Играч A ће добити вредност a_{ij} само ако он изабере i -ту стратегију, а играч B j -ту. Вероватноћа да играч A изабере i -ту стратегију је p_i , а вероватноћа да играч B одабере j -ту стратегију је q_j . Према вероватноћи производа независних догађаја, вероватноћа да играч A добије вредност a_{ij} једнака је $p_i q_j$. Средњи добитак играча A када он користи стратегију $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, а играч B стратегију $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ износи: $E(P, Q) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} p_i q_j$. Решење игре је пар оптималних стратегија, P' за играча A и Q' за играча

B. Средња вредност добитака у ствари представља вредност матричне игре, то јест: $v = E(P', Q')$.

Теорема 1: Да би стратегије P' и Q' биле оптималне, а при томе v представља вредност игре, потребно је и довољно да важе неједначине: $E(P_i, Q') \leq v \leq E(P', Q_j)$, за све чисте стратегије P_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и Q_j , $j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Теорема 2: (Основна теорема теорије игара). Свака матрична игра има решење.

Пошто за оптималну стратегију очекивана добит играча A не може бити мања од вредности игре за било који стратегијски избор противника, важи следећа релација:

$$E(P', Q') = q_1'(a_{11}p_1' + a_{21}p_2' + \dots + a_{n1}p_n') + q_2'(a_{12}p_1' + a_{22}p_2' + \dots + a_{n2}p_n') + \dots + q_m'(a_{1m}p_1' + a_{2m}p_2' + \dots + a_{nm}p_n') = v$$

Играч A мора да одабере стратегију тако да његов средњи добитак буде најмање једнак вредности игре, без обзира на стратегију другог играча. Одатле се добијају следеће релације:

$$\begin{aligned} a_{11}p_1' + a_{21}p_2' + \dots + a_{n1}p_n' &= v \\ a_{12}p_1' + a_{22}p_2' + \dots + a_{n2}p_n' &= v \\ &\vdots \\ a_{1m}p_1' + a_{2m}p_2' + \dots + a_{nm}p_n' &= v \end{aligned}$$

Уз новодобијене релације и претходно наведену једнакост $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, решава се систем једначина и добијају се вредности за оптималну мешовиту стратегију играча A . Аналогно овом поступку, добија се и мешовита стратегија другог играча.

Пример 3: Два играча, A и B , играју игру. Они бирају један од три броја и у зависности од избора добијају вредности које су дате у табели:

	1	2	3
1	2	5	4
2	8	3	1
3	4	3	6

ТАБЕЛА 1 – Вредности игре у зависности од одабира броја
TABLE 1 – Game values depending on number selection

Дата табела се може представити и матрицом 3×3 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 8 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E(P, Q) = 2p_1q_1 + 5p_1q_2 + 4p_1q_3 + 8p_2q_1 + 3p_2q_2 + p_2q_3 + 4p_3q_1 + 3p_3q_2 + 6p_3q_3$$

$$v = E(P', Q') = q_1'(2p_1' + 8p_2' + 4p_3') + q_2'(5p_1' + 3p_2' + 3p_3') + q_3'(4p_1' + p_2' + 6p_3')$$

Одавде се добија систем једначина:

$$2p_1' + 8p_2' + 4p_3' = v$$

$$5p_1' + 3p_2' + 3p_3' = v$$

$$4p_1' + p_2' + 6p_3' = v$$

$$p_1' + p_2' + p_3' = 1$$

Решавањем система четири једначине са четири непознате се добија мешовита стратегија играча А, као и вредност матричне игре: $p_1' = \frac{17}{36}, p_2' = \frac{2}{9}, p_3' = \frac{11}{36}, v = \frac{71}{18}$.

Са друге стране, добија се:

$$v = E(P', Q') = p_1'(2q_1' + 5q_2' + 4q_3') + p_2'(8q_1' + 3q_2' + q_3') + p_3'(4q_1' + 3q_2' + 6q_3')$$

односно систем једначина:

$$2q_1' + 5q_2' + 4q_3' = v$$

$$8q_1' + 3q_2' + q_3' = v$$

$$4q_1' + 3q_2' + 6q_3' = v$$

$$q_1' + q_2' + q_3' = 1$$

Решавањем овог система се добија мешовита стратегија другог играча, као и вредност игре: $q_1' = \frac{5}{18}, q_2' = \frac{1}{2}, q_3' = \frac{2}{9}, v = \frac{71}{18}$.

Дакле, решење задатка је: $P = (p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{17}{36}, \frac{2}{9}, \frac{11}{36}\right), Q = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{5}{18}, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$ и $v = \frac{71}{18}$.

Примена линеарне алгебре у другим областима

Економија: Применом матрица у економији добија се снажан алат за анализу, моделирање и доношење информисаних одлука у сложенем економском окружењу. Матрице, као математички концепти, омогућавају економистима да квантификују међусобне односе, идентификују кључне факторе утицаја на тржиштима и разумеју динамику економске равнотеже. Кроз различите примене, као што су моделирање тржишта, анализа инпут – аутпут веза или употреба матричних метода за решавање система економске једначине, матрице пружају дубљи увид у економске процесе. Ова математичка средства омогућавају сагледавање комплексности економске стварности и доношење информисаних одлука у циљу унапређења пословања, тржишних стратегија и укупне економске ефикасности.

Метеорологија: Линеарна алгебра се примењује за решавање система диференцијалних једначина који описују динамичке процесе у атмосфери. Матрице се користе за декомпозицију простора и времена, омогућавајући нумеричку симулацију временских

феномена. Ова анализа доприноси разумевању и прогнози временских прилика, као и проучавању дугорочних климатских промена.

Геофизика: Линеарне алгебарске технике се користе за анализу геолошких података и моделирање сеизмичких процеса. Матрице се користе за решавање проблема обраде сигнала из сеизмичких података како би се разумела унутрашња структура Земље.

Нуклеарна физика: Матрице распада радиоактивних материјала се користе за проучавање стабилности језгра и вероватноће нуклеарних реакција.

Програмирање: У графичком програмирању, линеарна алгебра се користи за манипулацију тродимензионалним објектима и трансформацијама. Матрице се користе за презентацију положаја и трансформацију објекта, као и за дефинисање перспективне пројекције како би се симулирала тродимензионална слика на дводимензионалном екрану. У нумеричкој анализи, концепти линеарне алгебре се користе за решавање система линеарних једначина, интерполацију података и апроксимацију функција. Матрице се користе за ефикасно решавање линеарних система и израчунавање нумеричких решења диференцијалних једначина.

Линеарна алгебра је нашла своју примену и у следећим областима: телекомуникације, агротехника, логистика, фармакологија, астрофизика, роботика, медицина, енергетика...

ЗАКЉУЧАК

Примена линеарне алгебре је изузетно разноврсна и обухвата многе дисциплине, од инжењеринга и рачунарства, до економије и физике. Кроз анализу линеарних система, векторских простора, линеарних трансформација и матрица, линеарна алгебра пружа кључне алате за моделирање и решавање проблема у реалном свету. У овом раду, представљене су основне карактеристике линеарне алгебре, концепти и теореме, као и начин на који се она интергира у разне домене. Указано је на значај ове области математике и на то колико су особине линеарне алгебре значајне у другим научним областима. Иако изгледа као теоријски концепт, у стварности постоје многи аспекти живота који су вођени алатима и методама линеарне алгебре. Примери дати у раду илуструју универзалну важност и широку применљивост линеарне алгебре у свим аспектима модерног друштва. Осим што омогућава анализу сложених система и моделирање реалних проблема, примена линеарне алгебре доприноси и развоју напредних технологија као што су вештачка интелигенција, машинско учење и дигитална обрада сигнала. Кроз своју широку применљивост, технике линеарне алгебре постају основа за иновације и напредак у многим областима, док истовремено пружају алате за ефикасно решавање изазова који се срећу у различитим доменима. Истраживање представљено у овом раду истакло је важност линеарне алгебре у различитим областима, укључујући рачунарство, економију, демографију, метеорологију, као и различите области математике. Све у свему, линеарна алгебра се показала као драгоцену средство за анализу и решавање сложених проблема и наставиће да игра кључну улогу у унапређењу научног знања.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А. Липковски, *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Завод за уџбенике, Прво издање, 2007. година
- [2] https://students.aiu.edu/submissions/profiles/resources/onlineBook/Y5B7M4_Introduction_to_Linear_Algebra-Fourth_Edition.pdf, приступљено: 1.2.2024.
- [3] <https://www.mi.sanu.ac.rs/~gvm/Teze/LinearAlgebra.pdf>, приступљено: 10.2.2024.
- [4] <http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/2215/Master%20rad%20-%20Marija%20Ivanovic.pdf?sequence=1>, приступљено: 1.3.2024.
- [5] https://matematika.pmf.uns.ac.rs/wp-content/uploads/zavrsni-radovi/primenjena_matematika/NatasaMukic.pdf, приступљено: 1.4.2024.